

Model Examen
Introducere in teoria numerelo

1. Găsiți **două** soluții $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cu $x < 0$ ale ecuației $39x + 93y = 12$.

2. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{13} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

3. Stabiliți dacă ecuația $x^2 \equiv 111 \pmod{47}$ are sau nu soluții.

4. Calculați $512^{239} \pmod{45}$.

5. Determinați câte numere naturale nenule mai mici decât 624 se divid cu 5 sau cu 7, dar nu se divid cu 3.

6. Determinați cifrele a, b în baza 6 astfel încât $\overline{5a1b}_{(6)}$ să se dividă cu 5 și $\overline{1a1b}_{(6)}$ să se dividă cu 7.

7. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(a, b) = 1$ și $d = (a + 3b, 7a + 11b)$. Arătați că $d \in \{1, 2, 5, 10\}$. Dați un exemplu de a și b astfel încât d să aibă valoarea 5.

8. Determinați numerele naturale prime p astfel încât $4p^2 - 11$ și $p^2 + 4$ să fie ambele prime.

9. (i) Determinați toate numerele $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n \equiv 2 \pmod{9}$.

(ii) Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$ și $2^n - 2$ este divizibil cu 9, atunci $2^n - 2$ este divizibil cu 63.